

图像分析中的矩技术

高月芳^{1),2)} 韩国强¹⁾ 李桂清¹⁾ 沃焱¹⁾ 王栋²⁾

¹⁾(华南理工大学计算机科学与工程学院,广州 510641) ²⁾(华南农业大学信息学院人机交互研究中心,广州 510642)

摘要 矩技术可广泛应用于图像检索和识别、图像分割、模板匹配、数据压缩、数字水印及运动图像序列分析等领域,近年来其研究取得了较大的进展。为了使人们对这一技术有个概略了解,首先对图像分析中的矩技术进行了较为全面的介绍和评述;然后着重探讨了离散正交矩技术在图像特征表示、图像重建、计算性能等方面的研究现状;最后提出了图像分析中的矩技术目前存在的问题和进一步的研究方向。

关键词 矩函数 不变矩 图像分析

中图法分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2009)08-1494-10

Development of Current Moment Techniques in Image Analysis

GAO Yue-fang^{1),2)}, HAN Guo-qiang¹⁾, LI Gui-qing¹⁾, WO Yan¹⁾, WANG Dong²⁾

¹⁾(School of Computer Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

²⁾(Research Center of Human Computer Interaction, College of Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642)

Abstract Moment techniques are an important research area and have been widely used in image processing and analysis such as pattern recognition, pattern matching, image compression, digital watermarking and so on. For helping the researchers to have a general understanding in this technique this paper presents a survey of recent and traditional moment techniques in image analysis. It discusses various types of moments, especially some fundamental aspects of discrete orthogonal moments, such as computation capacity, reconstruction accuracy, and invariance etc. in detail. Open issues and possible future research direction are also pointed out.

Keywords moment function, moment invariants, image analysis

1 引言

如今矩技术已广泛应用于图像检索和识别、图像匹配、图像重建、数字压缩、数字水印及运动图像序列分析等领域^[1-7]。图像矩可看作是目标函数 $f(x, y) \in L^2$ 在区域 xy 上的投影,即

$$m_{p,q} = \iint_{xy} \varphi_{p,q}(x, y) f(x, y) dx dy \quad (1)$$

其中, $\varphi_{p,q}(x, y)$ 为定义在区域 xy 上的函数,称之为基函数。选择不同的基函数生成不同的变换,即可得到不同的矩。当基函数为非正交形式时,其对应

的矩为非正交矩,如几何矩^[8]、径向矩^[9]等;当基函数为连续正交形式时,其对应的矩为连续正交矩,其中的代表为 Zernike 矩和 Legendre 矩^[10];当基函数为离散正交形式时,其对应的矩为离散正交矩,如 Tchebichef 矩^[11]、Krawtchouk 矩^[12]、Hahn 矩^[13-14]及 Racah 矩^[15]等。虽然非正交矩形式简单、计算快、易于实现,但抗噪性差、基函数非正交,且具有较大的信息冗余。连续正交矩的基函数正交,不仅其矩变换可逆,且易于图像重建,由于其各阶矩相互独立,故具有最小的信息冗余。其不足之处是该矩的基函数只在特定范围内是正交的,如 Legendre 矩在

基金项目:国家自然科学基金项目(60573019);广东省科技计划项目(2007A020100006-10)

收稿日期:2008-03-10;改回日期:2008-05-28

第一作者简介:高月芳(1979~),女,华南理工大学计算机应用技术专业博士研究生。主要研究方向为图像处理与模式识别。

E-mail:yuefang.gao@gmail.com

$[-1, 1] \times [-1, 1]$ 方形空间正交, Zernike 矩在单位圆区域正交。由于实际处理的图像一般都是离散图像, 因此上述方法在计算过程中不可避免地存在离散近似误差和图像坐标变换误差, 进而因影响矩值的计算精度而不利于目标识别。由于离散正交矩的基函数离散正交, 其定义域与图像坐标空间一致, 不存在离散近似误差和坐标变换等问题, 因此成为目前矩技术的一个研究热点。近年来, 人们对该技术的研究取得了较大的进展, 但还有许多问题有待进一步研究, 如计算量大、不变矩, 尤其是旋转不变矩难于构造等。

图像分析中, 矩技术的研究主要关注如下几个方面: (1) 不变矩构造问题, 即如何使用矩方法从有噪声干扰的样本数据中, 获取有关该目标的一般描述, 且该描述尽可能与噪声、仿射变换及环境无关; (2) 计算性能问题, 即如何快速准确计算相关矩值; (3) 图像重建问题, 即如何用一组矩来获得保真度高、抗噪性好的图像; (4) 新的应用问题, 即如何将矩技术应用于各个图像分析领域。针对上述问题, 本文首先对图像分析中出现的各种矩技术进行了扼要的介绍和分析, 然后分别对各种矩的构造、计算性能及图像重建算法进行详细的分析和讨论, 最后提出了可能的研究方向。

2 不变矩的构造与分析

图像的不变矩有时称为矩不变量 (moment invariants), 其是指图像在某种变换下, 变换前后计算出的矩值具有不变性。它是一个相对的概念, 如在平移变换下具有不变性的矩值称为平移不变矩, 在仿射变换下具有不变性的矩值称为仿射不变矩, 在模糊变换下具有不变性的矩值称为模糊不变矩等。由于不变矩能较好地表示图像函数到一些特定基函数的映射关系, 从而使得能够用一定数量的不变矩来描述图像。下面首先介绍一些与不变矩相关的基本术语和不变矩构造的基本理论, 然后对不变矩的构造及其性能进行分析和讨论。

2.1 基本术语

给定图像函数 $f(x, y)$, 假设它是分段连续的, 且仅在 xy 平面内的有限区域具有非零值。

(1) 几何矩

函数 $f(x, y)$ 的 $(p+q)$ 阶几何矩定义为^[8]

$$m_{p,q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

若 $f(x, y)$ 为 2 维数字图像, 则其离散形式表示如下:

$$m_{p,q} = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N x^p y^q f(x, y) \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

几何矩可视为图像 $f(x, y)$ 在基函数 $x^p y^q$ 上的投影, 且每个矩值携带一定量的图像信息。由于 p 和 q 可取所有的非负整数值, 它们产生一个矩值的无限集, 因此该集合完全可以确定图像 $f(x, y)$ 本身。

(2) 中心矩

函数 $f(x, y)$ 的 $(p+q)$ 阶中心矩定义为

$$\mu_{p,q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^p (y - y_0)^q f(x, y) dx dy \quad (4)$$

其中, p 和 q 可取所有的非负整数值, $x_0 = m_{1,0}/m_{0,0}$, $y_0 = m_{0,1}/m_{0,0}$ 。对于一幅图像函数 $f(x, y)$, 点 (x_0, y_0) 给出了图像区域的几何重心。由于中心矩以重心为原点进行计算, 故该矩具有平移不变性。

(3) 复数矩

复数矩是具有复函数核的各类函数的总称。此外, 定义在复平面上的几何矩的一般形式也可以看作是特殊的复数矩。函数 $f(x, y)$ 的 $(p+q)$ 阶复数矩定义如下:

$$C_{p,q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^p (x - iy)^q f(x, y) dx dy \quad (5)$$

其中, $p, q = 0, 1, 2, \dots$, $i = \sqrt{-1}$ 。由于图像的旋转仅引起复数矩的相位发生变化, 因此复数矩的振幅具有旋转不变性, 且复数矩较易构造旋转缩放不变矩。

(4) 仿射变换

仿射变换是由一个非奇异的线性变换加上一个平移变换组成。空间坐标 (x, y) 到 (\tilde{x}, \tilde{y}) 的相似变换定义为

$$\begin{cases} \tilde{x} = k_1 x + k_2 y + k_5 \\ \tilde{y} = k_3 x + k_4 y + k_6 \end{cases} \quad (6)$$

其中,

$$k_1 k_4 - k_2 k_3 \neq 0 \quad (7)$$

仿射变换可看作是相似变换的通用形式, 当对仿射变换进行各向同性缩放时, 其即为相似变换。

(5) 图像退化模型

若系统 H 是一个线性、位置不变的过程, 则在空间中由点扩散函数 $h(x, y)$ 造成的退化图像可由下式给出:

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \quad (8)$$

其中, $f(x, y)$ 为输入图像, $g(x, y)$ 为退化图像, “*” 表示图像的空间卷积。该退化模型包含相似变换和仿射变换等造成的退化, $\eta(x, y)$ 为加性噪声, $h(x, y)$

是退化函数的空间描述,而且在此讨论的 $h(x, y)$ 具有中心对称性和能量守恒性,即

$$h(x, y) = h(-x, -y) \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dx dy = 1 \quad (10)$$

2.2 不变矩基本理论

根据图像矩的定义直接计算出的矩值,因一般不具备不变性,故对于给定的矩,如何构造其不变矩显得尤为重要。下面不加证明地给出构造不变矩的有关理论和定理。

(1) 相似变换不变矩

具有旋转缩放平移不变性的矩,可通过对图像 $f(x, y)$ 进行平移、缩放和旋转处理来得到^[8]

$$V_{p,q} = m_{0,0}^{-r} \times \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} A^p B^q f(x, y) \quad (11)$$

其中,

$$A = (x - x_0) \cos\theta + (y - y_0) \sin\theta \quad (12)$$

$$B = (y - y_0) \cos\theta - (x - x_0) \sin\theta \quad (13)$$

(x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的重心点坐标, $r = (p + q + 2)/2$, θ 为旋转角度,且 $\tan 2\theta = 2 \times \mu_{1,1} / (\mu_{2,0} - \mu_{0,2})$, $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$, μ 值和 $m_{0,0}$ 值可根据式(3)和式(4)计算获得。计算 0° 到 360° 范围内的 θ 值可参考文献[10]。其他非正交和正交相似变换的不变矩均可通过该几何不变矩的线性组合获得^[10-15]。

(2) 仿射不变矩

若一个 p 阶代数式在一个仿射变换下有一个权重系数为 w 的代数不变量^[16]

$$I(a_{p,0}, a_{p-1,1}, \dots, a_{0,p}) = k^w \times I(\tilde{a}_{p,0}, \tilde{a}_{p-1,1}, \dots, \tilde{a}_{0,p}) \quad (14)$$

则 p 阶矩除了增加一个因子 $|J|$ 以外,并具有相同的不变量

$$I(\mu_{p,0}, \mu_{p-1,1}, \dots, \mu_{0,p}) = |J| k^w I(\tilde{\mu}_{p,0}, \tilde{\mu}_{p-1,1}, \dots, \tilde{\mu}_{0,p}) \quad (15)$$

其中, w 为权重系数, k 为一般线性变换矩阵的行列式的值。

(3) 模糊不变矩

模糊不变矩是指构造这样一个矩不变量:在图像清晰情况下计算得到的矩值与在受上述图像退化模型影响而形成模糊图像的情况下计算得到的矩值基本保持一致^[17]。设 $f(x, y)$ 为图像函数,定义如下函数: $C^{(f)}: Z \times Z \rightarrow \mathbf{R}$ 。当 $(p + q)$ 为偶数时, $C(p, q)^{(f)} = 0$; 当 $(p + q)$ 为奇数时,

$$C(p, q)^{(f)} = \mu_{p,q}^{(f)} - \frac{1}{\mu_{0,0}^{(f)}} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q \varphi_{n,m} \quad (16)$$

其中, $C(p, q)^{(f)}$ 为退化前的图像的矩值, $\mu_{p,q}$ 是图像 $f(x, y)$ 的中心矩,且

$$\varphi_{n,m} = \frac{p!}{n! (p-n)!} \times \frac{q!}{m! (q-m)!} \times C(p-n, q-m)^{(f)} \times \mu_{n,m}^{(f)} \quad (17)$$

则 $C(p, q)$ 对任意中心对称的点扩散函数具有模糊不变性,即若 $g(x, y)$ 是 $f(x, y)$ 的退化图像,则 $C(p, q)^{(g)} = C(p, q)^{(f)}$ 。

2.3 不变矩构造技术

Hu 首次采用几何矩的线性组合构造了具有平移、旋转和等比例缩放不变的 7 个经典的不变矩。这些不变矩是由归一化的二阶和三阶中心矩构造的,它们为图像矩理论奠定了基石,但对如何构造更多的不变矩则没有进一步分析和讨论。张天序等人在此基础上,总结出不变矩的一般构造规律,并提出了一种快速有效的推导不变矩的方法——三角函数生成法^[18-19],同时讨论了离散情况下一些图像不变矩的稳定性,并实验验证了该不变矩不是随原图像的几何变换恒定不变的,而是在一定范围内波动。Flusser 与刘进等人分别在几何中心矩基础上,推导出了一组具有相似和模糊不变性的矩不变量^[20-21]。此外,前者还对 Hu 不变矩进行了扩展和归纳,基于代数不变量理论推导出了一组具有一般仿射变换不变性和模糊不变性的矩不变量,同时还证明了旋转矩不变量的完备性和独立性,并对基于几何矩和复数矩推导的各种矩不变量及其在图像表示和识别方面的应用进行了总结和归纳^[22-23]。

Khotanzad 和 Bailey 等人详细分析和讨论了 Legendre, Zernike 及伪 Zernike 等连续正交矩的相似变换不变性,并设计了多种参数和非参数分类器,用来对其特征识别能力进行评估^[24-25],同 Hu 不变矩相比,该方法不仅具有较好的图像描述能力,且识别能力及其抗噪性能较优,其原因在于前者的基函数连续正交,而后者是非正交。Sheng 对复数矩进行了推广,推导出了一组正交傅里叶-梅林不变矩^[26]。对于较小尺寸的图像,其不变性优于 Zernike 矩,而不足之处则是其缩放不变性对图像变化敏感,且不易使用距离图像中心较高阶矩来描述图像。Chao 等人充分利用 Zernike 矩和正交傅里叶-梅林矩各自优点,推导出了一组混合矩不变量,用来表示变化较大的目标^[27]。针对上述不同形式的连续正交矩及其矩不变量, Ping 等人尝试给出一个一般形式,即雅可比-傅里叶矩^[28],其核函数由径向雅可比

多项式和傅里叶复数成分因子构成,并且通过适当调整其参数,可得到不同的正交矩。

正交不变矩的径向多项式的零点数目和位置分别表示该阶图像矩对图像的抽样频率和抽样位置,其对应的低阶矩主要描述了图像的轮廓特征,而高阶矩则捕获了高频细节信息。因此正交矩使得图像矩的抽样问题能得到很好的解决^[29],而其不足之处则是上述正交矩仅在特定区域内连续正交,因此在实际计算过程中需要进行数值近似和坐标空间变换,而且这些变换会影响不变矩的稳定性。与上述基于非正交矩和连续正交矩构造的不变矩不同,Yap 根据 Krawtchouk 离散正交矩与几何矩之间的关系,以几何不变矩的线性组合来构造具有相似变换不变性的 Krawtchouk 不变矩^[12]。虽然其识别能力优于几何不变矩,但由于几何矩自身的局限性,从而使得该方法不能完全体现 Krawtchouk 离散正交不变矩的优势。Mukundan 以切比雪夫离散正交多项式为例,推导出离散正交矩旋转不变矩的数学框架^[30]。该算法的主要思想是仿照 Zernike 矩先构造了离散正交旋转矩,然后通过计算其幅值来获得旋转不变矩。由于该矩的基函数是离散正交的,其旋转不变性能和抗噪性能均优于 Zernike 矩。由于该旋转矩在计算时不能处理图像边界,尤其是图像区域 4 个角落周围的信息,因此该算法较适合类似图 1 所示的圆形目标或在图像边界附近没有要处理的目标,以及类似图 2(b)所示的剪切旋转的图像,而不太适合如图 2(c)所示的旋转类型图像,其原因在于目标在旋转过程中,整个图像的尺寸发生了变化(如图 2(c)所示),而该算法没有考虑到这种情况。虽然 Zhu 等人直接利用切比雪夫正交多项式推导出了其平移和缩放不变矩^[31],但也没有考虑关于旋转不变性的问题。

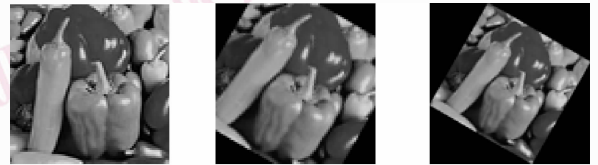
影响图像不变矩稳定性的主要因素有图像的抽样误差、离散误差及图像噪声等。由上述分析可知,



(a) 旋转0°后的图像 (b) 旋转30°后的图像

图 1 旋转 0°和 30°的圆形目标图像^[29]

Fig. 1 A set of binary image with rotate 0 and 30 degree



(a) 旋转0°图像 (b) 旋转30°剪切图像 (c) 旋转30°无剪切图像

图 2 旋转 0°和 30°的目标图像

Fig. 2 Image with rotate 0 and 30 degree

正交矩可有效解决图像的抽样误差,离散正交矩可较好地解决图像的离散误差现象。大家知道,低阶矩主要描述了图像的轮廓特征,而高阶矩则表示了图像的细节信息,由于高阶矩对噪声敏感,故噪声对上述不变矩的稳定性具有一定的影响。文献[32]讨论了噪声对几何矩、复数矩、Zernike 矩、伪 Zernike 矩的影响。实验表明,基于不同基函数推导的不变矩,其抗噪性能也不同。相对低阶矩,高阶矩对噪声更敏感;对同阶矩而言,复数矩的抗噪性能要优于几何矩的抗噪性能,Legendre 矩的抗噪性能最差,伪 Zernike 矩的抗噪性能要优于 Zernike 矩的抗噪性能,且复数矩、Zernike 矩、伪 Zernike 矩对噪声的敏感只依赖于阶数,而与循环次数无关;从抗噪性来讲,Zernike 矩、伪 Zernike 矩要优于几何矩和复数矩。一般而言,离散正交不变矩的抗噪性优于非正交和连续正交不变矩。上述各种矩的不变性分析归纳如表 1 所示。

表 1 各种不变矩构造分析

Tab. 1 Analysis of moment invariants construction

不变矩类型	几何矩	径向矩	Zernike 矩	Legendre 矩	正交傅里叶-梅林矩	Tchebichef 矩	Krawtchouk 矩	Hahn 矩
平移缩放不变矩	E	E	E	E	E	E	E	E
旋转缩放不变矩	NE	E	E	NE	E	NE	NE	NE
仿射不变矩	E	E	NE	NE	NE	None	None	None
模糊不变矩	E	E	E	E	E	None	None	None

注:E;易构造;NE;不易构造;None;暂无这方面研究。

3 矩的快速算法

虽然多数实际的应用仅考虑低阶矩,但在计算图像矩时,由几何矩的定义(式(3))可知,若直接进行计算,则涉及大量的加法和乘法操作,运算量大、效率低。为此,针对不同的矩,人们提出了各种硬件或软件策略试图提高计算性能^[33-36]。本质上,这些策略主要从减少计算涉及的像素个数和基于迭代算法方面考虑问题。前者一般是通过把区域积分转换为边界积分来实现;而后者则主要通过对定义矩的基函数进行迭代计算来减少计算量。

3.1 基于边界的快速算法

这类算法的主要思想是对目标区域的计算转换为对目标边界的计算,以减少计算量和提高计算速度。对于 2 维目标,主要采用格林理论将对目标区域的双重积分计算转换为边界的积分计算^[37-38]。一般对于 3 维目标,先利用高斯理论将体积分转换为表面积分,然后利用格林理论将双重积分转换为单重积分进行计算^[39-41]。不过该类算法主要用于二值图像的计算。与上述采用积分形式来表示边界不同,Dai 和 Wu 等人采用游程链码来表示目标的边界,并运用并行算法进行快速矩值计算^[42-43],该算法计算效率高、计算速度快;Stanislav 和 Jacob 等人采用样条或小波等平滑函数来表示目标边界,并计算其表示的平面目标的面积矩和几何矩^[44-45]。

3.2 基于变换的快速算法

Shen 等人利用离散 Randon 变换将 2 维矩计算分解为 1 维矩计算,从而提高了计算速度^[46]。不过该算法在减少乘法计算量的同时,却增加了加法操作的计算量,因而较适用于乘法操作多于加法操作的场合。

Belkasim 等人采用双轴变换将图像分为 4 个象限,并在变换后的象限内计算图像的几何矩^[47],从而减少了计算量 and 提高了计算速度。与直接法相比,该算法可节省 75% 的计算时间,此外,该算法也可扩展至 3 维情况。Hwang 利用 Zernike 矩基函数的对称和反对称特性来计算该矩^[48],该算法只需计算八分之一的矩值就可利用基函数的对称性和反对称性质来获得全部矩值,不仅计算速度快,且获得的矩值精度高。Pan 等人基于投影变换来计算图像的小波矩^[49],由于它可显著减少计算过程中的加法和乘法操作,所以可提高计算速度。

3.3 基于迭代的快速算法

由于基函数在图像矩值计算,尤其在高阶矩值的计算过程中涉及大量的乘法和加法运算。若能根据某些基函数自身的迭代特性进行计算,则可通过减少其中的加法和乘法操作(尤其是乘法操作),以提高计算速度。该类算法的基本思想是根据构成不同矩的基函数自身的迭代特性,通过设计基函数迭代公式和利用高阶与低阶的迭代相关来计算基函数,进而计算矩值。

Mukundan 基于迭代算法快速计算灰度图像的 Legendre 矩和 Zernike 矩,并将图像变换到单位圆环,以减少 Zernike 矩的计算量^[50]。为进一步减少计算开销,Gu 等人利用 Zernike 基函数的迭代特性,推导出了各阶 Zernike 矩之间的内部关系^[51],该方法可显著降低乘法操作,以提高计算速度。Chong 等人对当前的各种 Zernike 矩快速迭代算法进行了比较和分析,并结合其他快速方法各自的优点提出了新的迭代计算策略^[52],以提高计算效率。Yang 等人建立了 1 维 Legendre 矩的迭代关系式^[53],并推广至 2 维图像的 Legendre 矩计算。由于该算法中的乘法操作大大低于直接法中的乘法操作,因而同直接法相比,该算法计算速度快。此外,该算法不仅可以用于处理二值图像,而且可以处理灰度图像。

由于实际处理的图像是离散的,在采用上述方法进行快速计算时,需进行离散化处理,从而造成了近似误差而影响后续的图像分析。为此,人们引入了离散正交矩进行图像分析,以减少上述矩计算过程中存在的离散近似误差和图像坐标变换误差。关于离散正交矩,目前也有多种快速算法,例如 Wang 等人采用迭代算法来快速计算 Tchebichef 矩^[54]。同直接法相比,该算法简单,计算速度快。为进一步提高计算速度,章品正等人使用 Tchebichef 递推公式推导了 1 维 Tchebichef 矩的快速算法^[55],并将其推广至 2 维 Tchebichef 矩的快速计算,该算法可有效减少算术运算的次数,以提高计算速度。Raj 等人将上述算法进行了扩展,用来快速计算逆向 Krawtchouk 离散正交矩变换^[56]。Kotoulas 则利用硬件策略快速计算 Tchebichef 矩的各阶矩值^[57],该算法在计算速度上优于直接计算和递归计算方法。

不过,在图像矩的计算过程中,虽然上述基于迭代的算法可极大地提高图像矩,尤其是高阶图像矩

的计算性能,但由于在迭代过程中不可避免地会产生迭代累积误差和溢出误差等情况,从而影响了不变矩的稳定性和图像重建的性能。

4 基于矩的图像重建

4.1 定义和评价准则

由单值性定理可知^[58],若 $f(x, y)$ 是分段连续的,且仅在 xy 平面内的有限区域具有非零值,则各阶矩存在,且矩的序列由 $f(x, y)$ 唯一确定;反之亦然。由此可见,对式(1)进行逆向矩变换即可获得图像 $f(x, y)$ 。由于在实际应用中所处理的是数字图像,因此使用上述方式获得的重建图像与原始图像可能不完全相同,这就需要一种可重复的对于丢失信息的性质和范围进行定量的方法,目前较普遍采用的评估准则是客观保真度准则,即将信息损失的程度表示成原始图像与重建图像之间的函数。常用的评价准则主要包括均方误差(MSE)、均方根误差(RMSE)、信噪比(SNR)、峰值信噪比(PSNR)及结构相似性度量(SSIM)等。

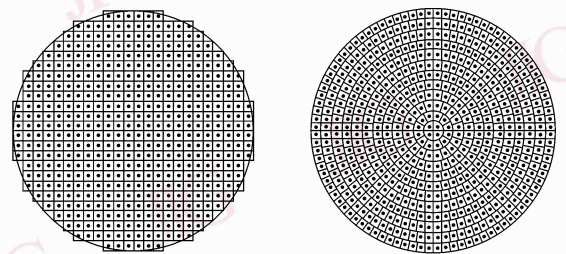
4.2 图像重建分析

在这一部分主要讨论这样一个问题,即基于上述图像重建度量准则,如何用一组矩值来更好地重建保真度高、抗噪性好的图像?

Pawlak 讨论了噪声对图像重建的影响,并推导出了矩的阶数、信号的平滑度、采样率与噪声特性之间的关系^[59]。但该估计较为粗略,对于较大的阶数并不能给出一个较小的误差边界。针对上述不足, Yin 提出了一个新的重建误差估计方法^[60],该方法明确地建立了矩的阶数、信号的平滑度、采样率与噪声特性之间的关系,虽然该文献仅对 1 维信号处理,但其所有结果可推广至 2 维图像情况。

由于非正交矩和连续正交矩的计算过程中,存在离散近似误差和图像变换误差,因此在用这些矩进行图像重建时重建精度将会受影响。Teh 等人讨论了几何矩计算过程中本身存在的离散误差及其对图像重建准确度的影响^[61]。Liao 等人详细分析了 Zernike 矩计算过程中存在的由圆自身固有的几何特性引起的几何误差,以及由积分离散化近似所造成的计算误差^[62]。由于 Zernike 矩的基函数在单位圆上正交,其定义域完全不同于图像坐标空间,因此一般情况下,一幅图像的相应矩的计算是以图像中心为原点,将图像像素映射到单位圆内,而落在单位

圆外的像素则不考虑。常用的映射方法是先建立图像与其内切圆之间的映射关系,然后对内切圆进行标准化处理(如图 3(a)所示)。该变换过程中不可避免地存在几何误差。此外,在实际应用中,若式(1)用离散求和代替,则该过程不仅因易产生离散误差而影响图像重建质量,而且会严重影响矩的解析性质,如不变性、正交性等。此外 Papakostas 等人还从 Zernike 矩迭代公式的计算性质方面,讨论了其计算过程中存在的溢出误差和有限精度误差^[63]。上述这些误差对基于 Zernike 矩的图像重建精确度影响很大。为减少计算误差, Singh 在 Zernike 矩值的计算过程中使用离散浮点计算来取代原来的离散整数计算^[64],虽提高了图像重建的质量,但该方法无法消除矩值计算过程中产生的几何误差和积分近似误差。Xin 等人以极坐标取代笛卡儿坐标来计算 Zernike 矩^[65],并对极坐标进行了设计和规划,以消除笛卡儿坐标下 Zernike 矩计算中存在的几何误差和积分近似误差(如图 3(b)所示)。Yap 通过直接对 Legendre 矩的定义公式进行推导,进而通过消除其近似误差,提出了一种精确计算 Legendre 矩的算法^[66]。该算法的图像重建质量优于其他传统的方法,且计算速度快。Fu 等人提出一种改进的 Legendre 矩算法^[67],用于较小图像的重建。该算法通过对 Legendre 多项式进行平移,使其区间 $[-1, 1]$ 的中心部分零的个数多于边界附近零的个数,从而使该算法对于较小图像,在标准均方差准则下,能获得比传统 Legendre 方法更优的重建效果。



(a) 图像映射到单位圆上^[65]

(b) 图像映射到极坐标上^[65]

图 3 不同的图像映射

Fig. 3 Different image mapping

与上述基于连续正交矩的图像重建不同,离散正交矩由于其基函数为离散正交多项式,其计算过程中不存在离散近似误差和图像坐标变换,故其图像重建效果优于非正交矩和连续正交矩。图 4(来自文献[14])是对 4 种矩的图像重建效果的比较。

这 4 种矩分别为 Legendre 矩、Tchebichef 矩、Krawtchouk 矩及 dual Hahn 矩,其中第 1 个为连续正交矩,其余的为离散正交矩。其中,图 4(a)为原始图像,图 4(b)~图 4(e)分别是阶为 50 的基于上述不同正交矩的重建图像的二值化结果,图 4(f)给出了最大阶为 50 的不同正交矩基于 MSE 准则的重建误差。从图 4(f)可以看出,Krawtchouk 矩和 dual Hahn 矩的图像重建性能优于其他矩。

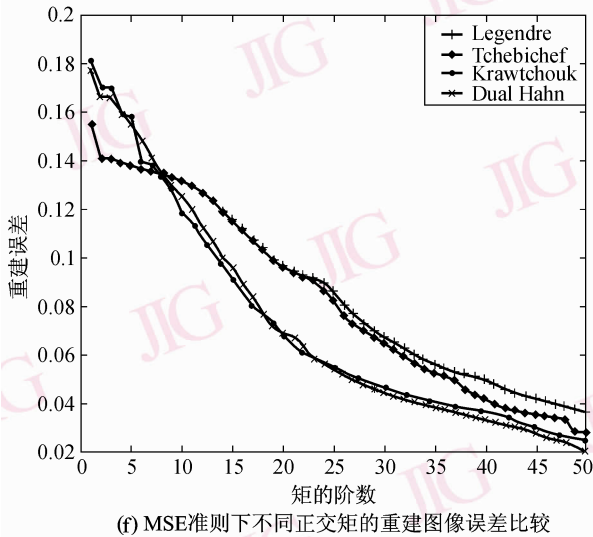
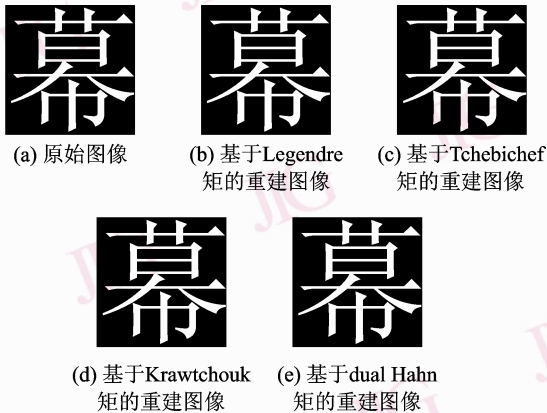


图 4 图像重建性能分析^[14]

Fig. 4 Comparative analysis of reconstruction error of Legendre, Tchebichef, Krawtchouk, and dual Hahn moment

不过,与连续正交矩一样,为提高离散正交矩的计算性能,针对其计算过程中一般也采用多项式的迭代方式进行计算,但对高阶矩而言,其不可避免地也会存在一定的迭代误差,从而影响图像的重建精度。为此,Bayraktar 等人直接从离散正交矩定义出发来计算多项式系数,并预先建立存放这些系数的查找表,然后根据查找表计算矩值,进而通过消除迭

代累计误差^[68],以提高图像的重建精度。但该算法在建立查找表时,必须预先指定好图像可能出现的最大尺寸,否则需重新计算离散多项式系数,此外,当图像尺寸变化时,则必须重新计算查找表,因此计算量较大。

5 新的应用

矩函数在图像分析中应用广泛,例如图像检索和识别、边缘检测、图像分割、模板匹配及运动图像序列分析等。随着矩技术研究的发展,以及许多新的矩函数(例如离散正交矩函数)被引入到图像分析领域,使得矩方法在图像压缩、图像水印等领域得到进一步的应用。

5.1 图像压缩中的应用

图像数据在传输和存储中,数据的压缩都是必不可少的。由于正交矩的基函数是正交多项式,其不仅矩变换可逆、各阶矩相互独立,而且每个矩值携带一定量的图像信息,因此可用其进行图像信息的压缩和解压缩处理。Mukundan 对各种离散正交基函数的图像压缩性能进行了比较和分析^[6]。实验分析表明,对于连续变化的图像,基于离散正交 Tchebichef 多项式的图像压缩能力与基于离散余弦变换的图像压缩能力相当,当图像的动态范围变化较大时,前者的图像压缩性能优于后者。但是,与后者相比,由于前者多项式的阶数在计算过程中不能迭代递减,从而使得其压缩速度较慢。

5.2 图像水印中的应用

图像水印技术是一种特殊的图像编码过程,它是将一定的信息嵌入到图像中,在保证不可见性的基础上,即使在受到攻击后仍然能被提取出来。由于几何攻击能极大地破坏水印检测的同步性,如旋转、缩放、平移等几何攻击能够破坏水印检测的同步性,从而使常规水印检测失败。为抗击几何攻击,不少算法开始利用图像的各种矩技术来进行图像水印分析。在众多图像矩方法中,由于 Zernike 矩除了具有旋转不变性,还具有对噪声不敏感的特性,且能够较好地表达图像特征。因此很多学者将 Zernike 矩应用到抗几何攻击的数字水印中,并取得了不错的效果^[69-71]。但是基于 Zernike 矩的抗几何攻击的数字水印方法也存在一些问题:(1) Zernike 矩振幅的幅度只具有旋转不变性,为了使其具有缩放、平移不变性,则需对图像进行归一化后,再计算 Zernike 矩,

而在对图像进行归一化过程中,却因重采样和重量化而引入了误差;(2)由于 Zernike 矩是连续正交矩,其计算过程中存在离散近似误差和坐标变换误差,从而会造成实际的 Zernike 矩值的稳定性降低。与连续正交矩相比,在离散正交矩的计算过程中,由于不存在离散近似误差和坐标变换误差,且其值动态范围变化小,因此,随着离散正交矩的提出,离散正交矩在图像水印中的应用也成为近年来一个研究热点^[7]。但由于上述基于矩的水印算法大都是对图像全局进行计算矩值,因此会影响水印对局部裁剪攻击的鲁棒性。

6 结 语

本文讨论了图像分析中的多种矩方法,这些方法各有特点,但目前还存在许多问题有待进一步研究和解决。这些问题主要包括以下几个方面:

(1)离散正交矩及其不变性分析。离散正交矩是近年来图像分析与模式识别领域中新兴的研究内容。与非正交矩和连续正交矩相比,由于其基函数离散,且在图像坐标系中正交,因此可用于解决非正交矩和连续正交矩中存在的离散近似误差和图像变换误差的问题。目前关于离散正交矩的研究主要集中在寻找合适的离散正交基函数及分析其图像重建性质等方面,有关其不变性、计算速度及精度等方面的研究较少,其中离散正交矩相似变换不变性、仿射变换不变性及模糊不变性等问题尚有待于进一步的解决。

(2)矩的快速计算及数值稳定性分析。快速矩计算是一个很重要,且很现实的问题。在许多应用中,尤其在实时系统中,对计算时间的要求非常严格,目前提出的多种快速矩算法大都是针对非正交矩和连续正交矩的,关于离散正交矩及其逆向变换问题尚研究较少。此外,如何避免在高阶矩计算过程中产生的累积误差和数值不稳定也是一个值得注意的问题。

(3)高维矩分析。相对于2维矩图像分析方面的文献而言,关于3维或更高维矩分析方面的研究较少。Sadjadi 利用圆锥表面将2维几何矩方法推广至3维,首次提出了3维矩不变量及其表示方法^[72]。Lo 基于群理论推导出了3维旋转矩不变量的计算方法^[73],Reiss 使用张量代数推导出了具有仿射不变性的3维矩不变量,并证明了上述两种3

维矩推导方法是其特例^[74]。Mamistvalov 给出了任意维空间下的矩不变量的基本理论,并证明了如何用其推导 n 维仿射不变矩^[75]。Flusser 等人将模糊和旋转不变矩推广到高维领域^[76]。此外,Tuzikov 和 Xu 等人还给出了3维目标表面矩的显式推导^[77-78]。虽然目前在高维矩方面做了一定的工作,但还存在许多问题,例如,如何用 n 维空间不变量的基础理论构造出确定数目的3维不变量?如何寻找构造满足某些不变性约束的3维不变矩?以及如何将已有的2维矩不变量推广至3维矩不变量等,这些对于3维图像分析和识别都是很重要的。

由于矩技术在图像分析中应用广泛,可以预见,作为一种有效的图像描述方法,随着新的矩函数被引入,其在图像分析与识别方面具有更大的应用前景。

参考文献 (References)

- 1 Prokop R J, Reeves A P. A survey of moment-based techniques for unoccluded object representation and recognition [J]. *Graphical Models and Image Processing*, 1992, **54**(5):438-460.
- 2 Li Zong-min. Moments and Its Applications in Geometric Shape Description [D]. Beijing: Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, 2005. [李宗民. 矩方法及其在几何形状描述中的应用[D]. 北京:中国科学院计算技术研究所, 2005.]
- 3 Liu J, Zhang T. Matching and normalization of affine deformed image from regular moments [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2004, **25**(4):1619-1631.
- 4 Ghorbel F. Image reconstruction from a complete set of similarity invariants extracted from complex moments [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2006, **27**(12):1361-1369.
- 5 Shutler J, Nixon M S. Zernike velocity moments for sequence-based description of moving features [J]. *Image and Vision Computing*, 2006, **24**(4):343-356.
- 6 Mukundan R. Transform coding using discrete Tchebichef polynomials [A]. In: *Proceedings of International Conference on Visualization Imaging and Image Processing [C]*, Palma de Mallorca, Spain, 2006: 270-275.
- 7 Venkataramana A. Image watermarking using Krawtchouk moments [A]. In: *Proceedings of International Conference on Computing: Theory and Applications [C]*, Kolkata, India, 2007: 676-680.
- 8 Hu M K. Visual pattern recognition by moment invariants [J]. *IRE Transactions Information Theory*, 1962, **8**(2):179-187.
- 9 Reddi S S. Radial and angular moment invariants for image identification [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1981, **3**(2):240-242.
- 10 Teague M R. Image analysis via the general theory of moments [J]. *Journal of Optimal Society of American*, 1980, **70**(8):920-930.

- 11 Mukundan R, Ong S H. Image analysis by Tchebichef moments [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, **10**(9):1357-1364.
- 12 Yap P T. Image analysis by Krawtchouk moments [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, **12**(11):1367-1377.
- 13 Yap P T, Paramesran R. Image analysis using Hahn moments [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, **29**(11): 2057-2062.
- 14 Zhu H Q, Shu H Z. Image analysis by discrete orthogonal dual Hahn moments [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2007, **28** (13): 1688-1794.
- 15 Zhu H Q, Shu H Z. Image analysis by discrete orthogonal Racah moments [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **87**(4): 687-708.
- 16 Suk T. Combined blur and affine moment invariants and their use in pattern recognition [J]. *Pattern Recognition*, 2003, **36** (12): 2895-2907.
- 17 Flusser J. Degraded image analysis: an invariant approach [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, **20**(6):590-603.
- 18 Liu Jin, Zhang Tian-xu. The generalization of moment invariants [J]. *Chinese Journal of Computers*, **27**(5): 668-674. [刘进, 张天序. 图像不变矩的推广 [J]. *计算机学报*, 2004, **27**(5): 668-674.]
- 19 Liu J, Zhang T X. Fast algorithm for generation of moment invariants [J]. *Pattern Recognition*, 2004, **37** (8):1745-1756.
- 20 Flusser J, Suk T. Recognition of blurred images by the method of moments [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1996, **5**(3): 533-538.
- 21 Liu J, Zhang T X. Recognition of the blurred image by complex moment invariants [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2005, **26**(8): 1128-1138.
- 22 Flusser J. On the independence of rotation moment invariants [J]. *Pattern Recognition*, 2000, **33**(9): 1405-1410.
- 23 Flusser J. Moment invariants in image analysis [A]. In: *Proceedings of the International Conference on Computer Science [C]*, Computica, Prague, 2006:196-201.
- 24 Khotanzad A. Invariant image recognition by Zernike moments [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, **12**(5):489-498.
- 25 Bailey R R, Srinath M. Orthogonal moment features for use with parametric and non-parametric classifiers [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, **18**(4): 389-399.
- 26 Sheng Y L, Shen L X. Orthogonal Fourier-Mellin moments for invariant pattern recognition [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1994, **11**(6):1748-1757.
- 27 Chao Kan, Srinath M D. Invariant character recognition with Zernike and orthogonal Fourier-Mellin moments [J]. *Pattern Recognition*, 2002, **35**(1):143-154.
- 28 Ping Z, Ren H. Generic orthogonal moments: Jacobi-Fourier moments for invariant image description [J]. *Pattern Recognition*, 2007, **40**(4): 1245-1254.
- 29 Amuguleng, Hasisurong, Ren Ai-zhen. Advances in the image analysis by moment invariants [J]. *Journal of Inner Mongolia Agricultural University*, 2005, **26**(4):146-150. [阿木古楞, 哈斯苏荣, 任爱珍. 不变矩图像分析研究进展 [J]. *内蒙古农业大学学报*, 2005, **26**(4):146-150.]
- 30 Mukundan R. Radial Tchebichef invariants for pattern recognition [A]. In: *Proceedings of IEEE Tencon Conference Tencon05 [C]*, Melbourne, Australia, 2005: 2098-2103.
- 31 Zhu H Q, Shu H Z. Translation and scale invariants of Tchebichef moments [J]. *Pattern Recognition*, 2007, **40**(9):2530-2542.
- 32 Teh C H, Chin R T. On image analysis by the methods of moments [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1988, **10**(4):496-513.
- 33 Zakaria M F. Fast algorithm for the computation of moment invariants [J]. *Pattern Recognition*, 1987, **20**(6):639-643.
- 34 Pan Y. A note on efficient parallel algorithms for the computation of two-dimensional image moments [J]. *Pattern Recognition*, 1991, **24**(9): 917.
- 35 Kotoulas L, Andreadis I. Efficient hardware architectures for computation of image moments [J]. *Real-Time Imaging*, 2004, **10**(6): 371-378.
- 36 Kotoulas L, Andreadis I. Real-time computation of Zernike moments [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2005, **15**(6): 801-809.
- 37 Li B C, Shen J. Fast computation of moment invariants [J]. *Pattern Recognition*, 1991, **24**(8):807-813.
- 38 Yang L, Albrechtsen F. Fast and exact computation of Cartesian geometric moments using discrete Green's theorem [J]. *Pattern Recognition*, 1996, **29**(7): 1061-1073.
- 39 Li B. The moment calculation of polyhedron [J]. *Pattern Recognition*, 1993, **26**(8): 1229-1233.
- 40 Yang L, Albrechtsen F. Fast computation of three-dimensional geometric moments using a discrete divergence theorem and a generalization to higher dimensions [J]. *Graphical Models and Image Processing*, 1997, **59**(2):97-108.
- 41 Shu H Z, Luo L M. Fast computation of Legendre moments of polyhedra [J]. *Pattern Recognition*, 2001, **34** (7):1119-1126.
- 42 Dai M, Baylou P. An efficient algorithm for computation of shape moments from run-length codes or chain codes [J]. *Pattern Recognition*, 1992, **25**(10): 1119-1128.
- 43 Wu C H, Horng S J. Run-length chain coding and scalable computation of a shape's moments using reconfigurable optical buses [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (Part B)*, 2004, **34**(2): 845-855.
- 44 Jacob M, Blu T. An exact method for computing the area moments of wavelet and spline curves [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001, **23**(6): 633-642.
- 45 Sheynin S, Tuzikov A. Moment computation for objects with spline curve boundary [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, **25**(10): 1317-1322.
- 46 Shen T W, Lun D P K, Siu W C. On the efficient computation of 2D

- image moments using the discrete Radon transform [J]. *Pattern Recognition*, 1998, **31**(2):115-120.
- 47 Belkasim S O, Kamel M. Fast computation of 2-D image moments using biaxial transform [J]. *Pattern Recognition*, 2001, **34**(12):1867-1877.
- 48 Hwang S K. A novel approach to the fast computation of Zernike moments [J]. *Pattern Recognition*, 2006, **39**(11):2065-2076.
- 49 Pan H, Xia L Z. Exact and fast algorithm for two-dimensional image wavelet moments via the projection transform [J]. *Pattern Recognition*, 2005, **38**(3):395-402.
- 50 Mukundan R. Fast computation of Legendre and Zernike moments [J]. *Pattern recognition*, 1995, **28**(9):1433-1442.
- 51 Gu J, Shu H Z. A novel algorithm for fast computation of Zernike moments [J]. *Pattern Recognition*, 2002, **35**(12):2905-2911.
- 52 Chong C W, Raveendran P. A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments [J]. *Pattern Recognition*, 2003, **36**(3):731-742.
- 53 Yang G Y, Shu H Z. Efficient Legendre moment computation for grey level images [J]. *Pattern Recognition*, 2006, **39**(1):74-80.
- 54 Wang G B, Wang S G. Recursive computation of Tchebichef moment and its inverse transform [J]. *Pattern Recognition*, 2006, **39**(1):47-56.
- 55 Zhang Pin-zheng, Wang Zheng, Xu Qin-zhen. A method for efficiently computing two-dimensional forward and inverse Tchebichef orthogonal moments [J]. *Signal Processing*, 2007, **23**(1):69-72. [章品正, 王征, 徐琴珍. 二维 Tchebichef 矩正反变换的快速算法[J]. *信号处理*, 2007, **23**(1):69-72.]
- 56 Raj P A, Venkataramana A. Fast computation of inverse Krawtchouk moment transform using clenshaw's recurrence formula [A]. In: *Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Image Processing [C]*, San Antonio, Texas, USA, 2007: 37-40.
- 57 Kotoulas L G. Fast computation of Chebyshev moments [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2006, **16**(7):884-888.
- 58 Papoulis A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Process (3rd ed)* [M]. New York, USA: McGraw-Hill, 1991.
- 59 Pawlak M. On the reconstruction aspects of moment descriptors [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, **38**(6):1698-1708.
- 60 Yin H. Analysis for the reconstruction of a noisy signal based on orthogonal moments [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, **132**(2-3):249-263.
- 61 Teh C H, Chin R T. On digital approximation of moment invariants [J]. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1986, **33**(3):318-326.
- 62 Liao X, Pawlak M. On the accuracy of Zernike moments for image analysis [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, **20**(12):1358-1364.
- 63 Papakostas G A, Boutalis Y S. Numerical error analysis in Zernike moments computation [J]. *Image and Vision Computing*, 2006, **24**(9):960-969.
- 64 Singh C. Improved quality of reconstructed images using floating point arithmetic for moment calculation [J]. *Pattern Recognition*, 2006, **39**(11):2047-2064.
- 65 Xin, Y, Pawlak, M. Accurate computation of Zernike moments in polar coordinates [J]. *Image Processing*, 2007, **16**(2):581-587.
- 66 Yap P T. An efficient method for the computation of Legendre moments [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(12):1996-2002.
- 67 Fu B, Zhou J Z. image analysis by modified Legendre moments [J]. *Pattern Recognition*, 2007, **40**(2):691-704.
- 68 Bayraktar B, Bernas T, Robinson J P. A numerical recipe for accurate image reconstruction from discrete orthogonal moments [J]. *Pattern Recognition*, 2007, **40**(2):659-669.
- 69 Zheng D, Liu Y, Zhao J Y. A survey of RST invariant image watermarking algorithms [A]. In: *Proceedings of the International Conference on Electrical and Computer Engineering [C]*, Ottawa, Canadian, 2006:2086-2089.
- 70 Liu H M, Wei R. Binary image authentication using Zernike moments [A]. In: *Proceedings of 14th IEEE International Conference on Image Processing [C]*, San Antonio, Texas, USA, 2007: 385-388.
- 71 Li Lei-da, Guo Bao-long, Li Ya-ning. Geometrically robust image watermarking based on pseudo-Zernike moments [J]. *Journal of Optoelectronics. Laser*, 2007, **18**(2):231-235 [李雷达, 郭宝龙, 刘雅宁. 基于伪 Zernike 矩的抗几何攻击图像水印[J]. *光电子·激光*, 2007, **18**(2):231-235.]
- 72 Sadjadi F A. Three-dimensional moment invariants [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1980, **2**(2):127-136.
- 73 Lo C H. 3-D moment forms: their construction and application to object identification and positioning [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, **11**(10):1053-1064.
- 74 Reiss T H. Features invariant to linear transformations in 2D and 3D [A]. In: *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition [C]*, Hague, Netherlands, 1992: 493-496.
- 75 Mamistvalov G. N-Dimensional moment invariants and conceptual mathematical theory of recognition n-dimensional solids [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, **20**(8):819-831.
- 76 Flusser J, Boldys J. Moment forms invariant to rotation and blur in arbitrary number of dimensions [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, **25**(2):234-246.
- 77 Tuzikov A, Sheynin S. Computation of volume and surface body moments [J]. *Pattern Recognition*, 2003, **36**(11):2521-2529.
- 78 Xu D, Li H. 3-D surface moment invariants [A]. In: *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition [C]*, Hong Kong, China, 2006: 173-176.